Repères pour des progressions sur les figures usuelles

Ce texte a pour objectif de donner aux enseignants des repères pour penser des progressions sur les figures usuelles dans une approche[1] cohérente de la géométrie au long de la scolarité obligatoire. De la maternelle à la troisième, il s'agit de passer de la reconnaissance de formes d'objets matériels qu'on manipule à des objets théoriques définis par des propriétés et à l'aide desquelles on établit d'autres propriétés par des démonstrations. Nous nous intéressons ici à la fin du cycle 2 et au cycle 3 (du CE2 à la 6ème) où l'on passe d'objets que l'on reconnaît par des qualités perceptives à des tracés correspondant à des propriétés énoncées dans le langage, que l'on peut produire et contrôler par des instruments.

Les repères sur les familles de figures sont présentés à partir de situations de restauration de figures qui pourraient servir de base pour construire des séances de classe avec des élèves. Les situations sont décrites du point de vue des connaissances mathématiques visées. On y indique des variables didactiques sur lesquelles on peut jouer pour adapter la situation au niveau des élèves, la rendre problématique mais accessible, pour faire progresser leurs connaissances sur ces figures mais aussi sur les objets fondamentaux de la géométrie : droites, points, angles, égalité de longueurs. La mise en œuvre en classe n'est pas décrite et reste à la charge du professeur. On trouvera dans cette partie de la ressource des situations détaillées mises en œuvre en classe sur les figures usuelles (triangles, carrés, rectangles) et tenant compte des repères proposés par ce texte.

L'approche se fait sans les nombres : le report de longueurs se fait et l'égalité de longueurs se vérifie à partir de gabarits de longueurs. Les activités de mesure sont importantes également mais ne doivent pas être le seul moyen de reporter des longueurs. Le passage trop précoce par les nombres risque de masquer les activités sur les concepts géométriques et sur les grandeurs.

Les figures sont regroupées en trois familles : la première s'intéresse principalement aux carrés, rectangles et triangles rectangles ; la seconde aux triangles et autres polygones ; la troisième au cercle. Le triangle rectangle figure dans les deux premières familles, d'une part comme demi-rectangle, d'autre part comme triangle particulier et aussi comme moyen de décomposer n'importe quel triangle en vue de le construire à l'équerre. Seule la première partie est rédigée de façon un peu détaillée et sert d'exemple pour la démarche générale ; les autres parties ne sont qu'ébauchées. Au cours du travail sur les figures, on a l'occasion de rencontrer des propriétés et relations géométriques : parallélisme, perpendicularité, symétrie. La manière dont la progression sur les figures pourrait être croisée avec celle sur les relations n'est pas abordée dans le présent texte.

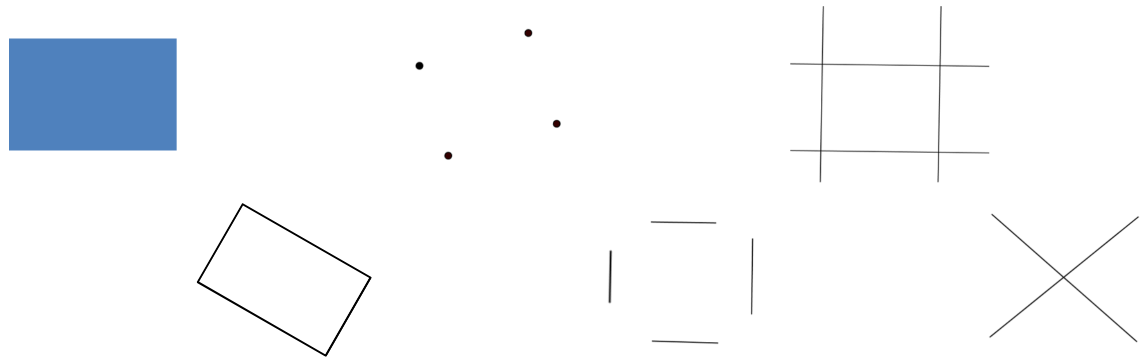
---

[1] Voir texte « Notre approche de la géométrie plane ».

I. Carrés, rectangles, triangles rectangles et losanges du CE2 à la 6ème

Introduction

Si on regarde les figures suivantes, on peut y voir plus ou moins facilement un rectangle.



Acquérir la mobilité du regard entre les visions[2] surfaces, lignes et points des figures, c'est voir selon les besoins n'importe laquelle des figures à partir d'une seule d'entre elles. Dès que l'une est présente, les autres sont mentalement présentes et d'autres au besoin. Cela suppose de voir différentes composantes de la figure et les relations entre elles. A ce moment-là il devient équivalent de reproduire l'une ou l'autre. En même temps, on enrichit la signification des mots : le mot rectangle évoque toutes les propriétés.

De plus, ces figures, placées ici pour la plupart en position prototypique (position avec des côtés horizontaux et verticaux) doivent pouvoir être identifiées dans n'importe quelle position dans la feuille. Les positions prototypiques, plus accessibles à la perception, sont utiles et importantes pour créer des repères, des images mentales mais il est important aussi d'être capable de s'en libérer pour reconnaître les figures usuelles dans toutes les positions. Dans toute la suite, afin d'économiser la place, les situations sont présentées avec des figures en position prototypique ; dans la mise en œuvre avec des élèves, il faut prendre en compte cette variable et varier les positions.

Cette première partie sur les carrés, rectangles, triangles rectangles et losanges procède à partir de deux entrées :

1) des étapes pour une progression sur le carré de la fin du cycle 2 à la fin du cycle 3 à partir de situations qui correspondent à une évolution du regard que l'on porte sur les figures en même temps qu'à l'avancée dans la conceptualisation des objets géométriques et l'enrichissement du vocabulaire. Evidemment ce ne sont pas des situations à traiter toutes les unes à la suite des autres. Par exemple certaines situations décrites dans le cas du carré peuvent être traitées d'abord dans le cas d'un rectangle, voire d'un polygone quelconque. Les étapes indiquent des repères qui permettent d'identifier à travers des situations la progression des connaissances sur le carré et le rectangle. Il y a des redondances qui permettent des reprises au fil des années en proposant des variantes des situations.

[2] Des précisions sur ces différentes visions seront données à la fin du texte. Voir aussi texte « Notre approche de la géométrie plane ».

2) des indications sur les autres quadrilatères et les relations entre ces figures, en essayant d'identifier celles qui correspondent à une vision en termes de surfaces juxtaposées ou superposées et celles qui correspondent à une vision en termes de lignes et points qui permettent de construire la figure et d'énoncer ses propriétés.

Les repères de progression sont pensés sur papier uni mais incluent quelques remarques sur l'usage du papier quadrillé. Ils seraient à compléter pour s'adapter à l'usage de logiciels de géométrie.

Le carré : du contour d'un gabarit à la construction à la règle et à l'équerre

Objectifs : les propriétés sur les côtés et les angles (cycle 2) sont abordées dans les étapes 1 et 2 ; celles sur les diagonales dans les étapes 3 et suivantes ; ces dernières situations peuvent être abordées d'abord dans le cas du rectangle (voir relations entre figures) et s'étaler sur des séances réparties sur plusieurs années : travail amorcé au CE2 (étapes 3 et 4), prolongé au CM, construction à partir d'une diagonale et lien avec le cercle circonscrit au CM2 et en 6ème (étapes 6 et 7).

Caractéristiques communes des situations : Appui sur la restauration de figure. La restauration de figure est une reproduction de figure mais où des parties de dimension 2 de la figure sont fournies soit par une amorce de la figure à reproduire soit par la mise à disposition d'instruments comme des gabarits qui permettent de transporter des parties de dimension 2 de la figure modèle[3]. Dans toutes les situations qui suivent, un carré modèle est dessiné. Il faut le restaurer à partir de différents outils et données. La règle non graduée non informable[4] n'est pas mentionnée mais elle fait toujours partie des outils.

Étape 0

Cette étape relève plutôt des classes antérieures (CP ou CE1) et peut aussi bien être réalisée avec un rectangle : restaurer un carré avec un gabarit dont il ne manque qu'un coin (ou deux mais avec des parties de tous les côtés présentes, voir Figure 1).
On peut déjà tracer le long des bords du gabarit qui ne sont pas déchirés ; on obtient un carré incomplet (Figure 2). En tournant le gabarit, on peut terminer le carré (Figure 3).

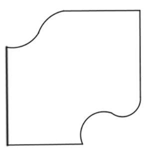


Figure 1

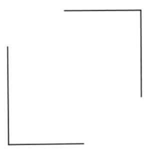


Figure 2

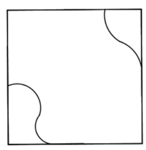


Figure 3

On peut aussi prolonger les tracés pour obtenir les sommets manquants comme intersection des supports des côtés. Cette deuxième procédure relève déjà d'une vision lignes : comme on n'a pas la longueur d'un côté, le sommet manquant ne peut être vu seulement comme extrémité d'un côté ; il faut le voir comme intersection. Les élèves du cycle 2 résistent en général à « dépasser » et font des ajustements par petits prolongements. C'est un apprentissage de prolonger suffisamment le support d'un des côtés puis de gommer si l'on ne veut pas garder les lignes de construction (pour le deuxième côté, on peut s'arrêter au bon endroit).

[3] Voir aussi le texte « Notre approche de la géométrie plane ».
[4] Une règle non informable est une règle non graduée sur laquelle on ne peut ajouter aucune marque.

Le problème peut être repris au CE2 à partir d'une figure partiellement effacée (un carré dont il manque un ou deux sommets, voire les quatre mais pour lesquels tous les côtés sont tracés au moins en partie, voir Figure 4) avec pour seul instrument une règle (non graduée non informable). Sans le gabarit, seule la procédure de prolongement est possible.

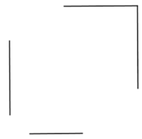


Figure 4

Cette procédure est utilisable pour n'importe quel polygone. Au cycle 2, on peut proposer de reproduire un polygone avec un gabarit dont un morceau est déchiré (sur un côté, puis un coin).

On peut aussi demander de terminer un carré dont un coin est caché par une autre figure (comme dans l'activité du livre du CRDP sur les activités géométriques au cycle 3, Figure 5). Dans ce cas, l'autre figure (ici le triangle équilatéral) joue un rôle de distracteur. Cela peut être posé d'emblée comme une activité problématique en CE2 ou une activité de réinvestissement de celle qui précède.

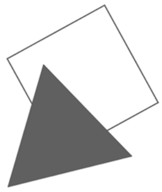


Figure 5

Étape 1 *(CE2 ou CM1) :*

On dispose du modèle et d'un gabarit à la bonne taille mais déchiré où il manque tout un côté (on a un côté entier et des amorces des côtés consécutifs à celui-là, le dernier bord n'est pas droit, voir Figure 6).

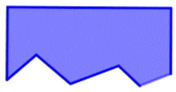


Figure 6

<u>Astuce gain de temps pour les gabarits</u> : dans une feuille de papier fort coloré, on découpe des carrés identiques par bandes et on les coupe en deux par un zigzag reliant 2 côtés opposés.

Procédure attendue : Avant de tracer, on vérifie sur le modèle que le gabarit correspond bien à un morceau du carré à reproduire et que différents placements sont possibles. Pour tracer, on commence le contour du carré en suivant le gabarit (Figure 7) et on le continue en faisant tourner le gabarit 2 fois (Figures 8 et 9) ; il reste éventuellement à joindre pour le dernier côté (Figure 10).

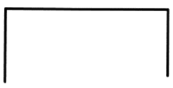
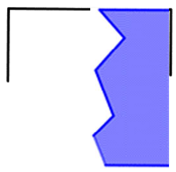
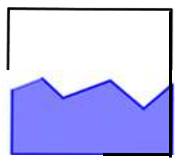
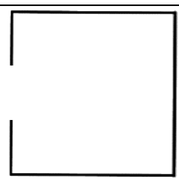
			

Figure 7	*Figure 8*	*Figure 9*	*Figure 10*

Ici on doit utiliser une vision contour, intermédiaire entre la vision surface et la vision lignes : on reconstruit le carré surface à partir de son contour qu'on obtient en tournant le gabarit.

Remarque : On peut ne tourner le gabarit qu'une fois et obtenir le dernier sommet par intersection des prolongements des côtés.

Aides éventuelles :

- Pour démarrer : est-ce que tu peux commencer le carré ?
- Ensuite : qu'est-ce qu'il te manque ? Le gabarit peut-il t'aider ? Le modèle peut-il t'aider ?

Erreurs possibles des élèves : après avoir commencé le contour avec le gabarit, essayer de terminer le carré en s'appuyant sur les côtés incomplets ou leur prolongement mais sans reporter la longueur du côté à l'aide du gabarit. Dans ce cas, le risque est d'obtenir un rectangle, voire un trapèze.

Ce qu'on retient :
Pour reproduire le carré, on a utilisé les angles droits et la longueur du côté du carré sur le gabarit. En tournant le gabarit, on peut reporter la longueur du côté et faire un troisième angle droit.

Étape 2 **:** On dispose du modèle (carré différent de celui de l'étape 1) mais on n'a plus qu'un coin du carré-gabarit et on a un outil de report de longueur (bande de papier avec un bord rectiligne sans graduation et sur lequel on peut écrire ; nous appellerons cet outil une règle informable).

Variante (pour un réinvestissement) : on n'a pas le modèle mais on a un côté du carré déjà dessiné, ce qui fixe la taille du carré.

<u>Astuce gain de temps pour les gabarits</u> : on fait des bandes de carrés dans une feuille de papier fort coloré et on coupe les carrés en 4 par deux lignes sinueuses ou en zigzags qui joignent les côtés opposés. On peut garder les mêmes carrés que pour l'étape 1 en donnant un modèle un peu plus grand puisqu'on ne va garder que l'angle droit). On peut aussi utiliser le coin qui reste si, dans l'étape 0, on a fabriqué un carré avec un coin déchiré.

Procédures attendues :

1. <u>Report de trois longueurs et de deux angles droits</u> : à partir d'un premier côté (donné ou dont on prend la longueur sur le modèle à l'aide de la règle informable), on trace à l'aide du gabarit du coin du carré les supports des côtés adjacents à celui-là, puis on reporte la longueur du côté pour obtenir deux autres côtés et les sommets qui manquaient (Figures 11 et 12) ; il reste à joindre les derniers sommets (Figure 13).

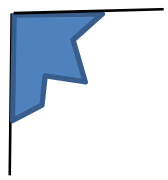


Figure 11

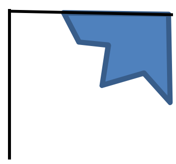


Figure 12

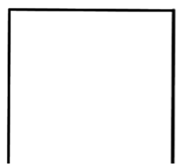


Figure 13

2. <u>Report de deux longueurs et de trois angles droits</u> : on trace un angle droit à chaque extrémité du segment de départ, on reporte une longueur sur une des demi-droites obtenues ce qui donne un deuxième côté et un troisième sommet du carré et, à l'extrémité obtenue, on reporte un autre angle droit : le dernier sommet s'obtient par intersection des demi-droites.

Aide éventuelle : mêmes questions (sauf celle sur le modèle dans le cas où on n'en dispose pas).

Conclusion de ces deux étapes : dans un carré, tous les côtés ont la même longueur, tous les angles sont droits.

Si on met côte à côte deux angles droits en faisant coïncider un sommet et un côté de l'angle, les autres côtés de l'angle droit sont alignés.

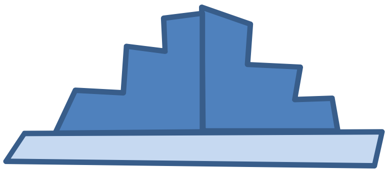


Figure 14

La dernière phrase est importante : quand on a une droite et un point sur cette droite, on peut placer l'équerre d'un côté ou de l'autre. Evidemment, on verra cela aussi avec la notion de droites perpendiculaires.

Remarque : On peut prolonger cette étape par la construction avec une équerre et un instrument de report de longueur d'un carré dont un côté est donné. Il s'agit d'une construction parce qu'on n'a plus de modèle.
C'est seulement après qu'on donnera les côtés des carrés par leur mesure et qu'on pourra construire un carré de côté donné par sa mesure.

Étape 3 ***(CM1) :*** Le modèle est un carré et ses diagonales tracées (Figure 15). On donne un gabarit d'un demi-carré (triangle rectangle obtenu en coupant le carré suivant une diagonale) à la bonne taille (Figure 16).

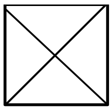


Figure 15

Figure 16

Figure 17

Figure 18

Ici on peut garder une vision surface : le report du gabarit sur le modèle révèle qu'il s'agit d'un demi carré qui recouvre deux des petits triangles du modèle. On peut restituer le carré à l'aide du gabarit en traçant d'un premier triangle rectangle contour du gabarit puis en le tournant pour obtenir le carré (Figure 17) et enfin en traçant l'autre diagonale (Figure 18). On peut aussi tracer un deuxième triangle rectangle appuyé sur un côté déjà tracé en tournant ou retournant le gabarit et terminer le carré en joignant les deux sommets qu'il reste à joindre.

Du point de vue de la restauration du carré, cette situation est plus facile que celle de l'étape 2 puisque le gabarit porte à la fois l'angle droit et la longueur du côté. Cependant, comme le modèle contient les diagonales, la figure à reproduire est plus complexe et il y a plus de procédures possibles.

On peut aussi demander de restaurer la figure sans gabarit avec comme amorce un triangle rectangle demi-carré et comme seul instrument une équerre non graduée (gabarit d'angle droit). Si on donne comme amorce un côté du carré, un outil de report de longueur devient nécessaire (étape 4).

Ce qu'on retient : une diagonale partage le carré en deux triangles rectangles (isocèles) superposables.

Remarques importantes
1) Il peut être plus pertinent de rencontrer cette situation d'abord dans le cas du rectangle. Dans ce cas, le triangle rectangle n'a pas d'autre particularité. Un tel triangle rectangle demi-rectangle permet de restaurer le rectangle alors qu'un gabarit analogue à celui qu'on a utilisé dans l'étape 1 (préservant un côté encadré de deux angles droits) ne le permettrait pas car il n'a qu'un gabarit de longueur alors qu'il en faut deux pour un rectangle.

2) On peut utiliser cette situation sans avoir travaillé les triangles et les triangles particuliers auparavant. On peut parler de triangle rectangle et voir plus tard qu'on a affaire à un triangle rectangle isocèle ; cela peut aussi l'occasion d'introduire le mot parce que les côtés de l'angle droit ont la même longueur.

Étape 4 : on garde le même gabarit mais la figure à reproduire est à une taille différente plus petite ou plus grande que le modèle ; on a éventuellement dessiné un côté du carré à obtenir (Figure 21) et on dispose d'une règle informable pour reporter les longueurs.

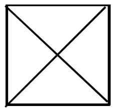


Figure 19

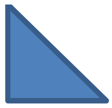


Figure 20

Figure 21

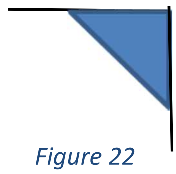


Figure 22

Comme le modèle est à une taille différente, on ne peut plus faire le tour du gabarit pour obtenir un demi-carré. On est obligé de mettre en œuvre au moins une vision contour du carré et d'utiliser les propriétés sur les angles droits et les longueurs des côtés établies dans les étapes 1 et 2 pour reproduire le carré. Le gabarit sert pour les angles droits (comme une équerre) mais le report de la longueur du côté doit se faire avec un reporteur de longueur (règle informable). Les diagonales peuvent se tracer une fois qu'on a tracé le carré.

Remarque : Il s'agit en fait ici de construire un carré dont un côté est donné, avec une équerre et un instrument de report de longueur comme dans le prolongement de l'étape 2 et de tracer les diagonales ensuite. Mais la présence des diagonales complexifie le problème et peut induire d'autres procédures.

En effet, comme on dispose d'un gabarit triangle rectangle isocèle, il est possible aussi de restaurer les triangles demi-carrés en se servant à la fois de l'angle droit et des autres angles du gabarit : si un côté du carré est déjà tracé, on peut commencer par reproduire un triangle demi-carré en reportant les angles à chaque extrémité du segment (voir figure ci-contre).

Figure 23

Si aucun côté du carré à reproduire n'est tracé, il faut reporter une longueur à l'aide de la règle informable : on reporte une longueur entre deux angles. On peut continuer en reproduisant de la même manière un autre triangle rectangle partiellement superposé au premier et terminer en joignant deux sommets.

Dans le cas du rectangle, la donnée d'un côté ne suffit pas, il faut au moins donner deux segments qui représentent les deux dimensions, sans forcément les mettre en bonne position.

A retenir : Les diagonales du carré le partagent en quatre triangles rectangles isocèles superposables.

Étape 5 *(CM2 ou $6^{ème}$ en interaction avec un travail sur le cercle)* **:**

Le modèle est un carré inscrit dans un cercle avec ses diagonales tracées (Figure 24) ; l'amorce comprend le cercle et un triangle rectangle quart de carré (amorce 5a, Figure 25) ou le cercle et un triangle rectangle demi carré (amorce 5b, Figure 26) ; pour 5a, le seul instrument est une règle non graduée non informable ; pour 5b on a en plus un instrument pour prendre le milieu d'un segment (bande de papier avec un bord droit sur laquelle on peut écrire et qu'on peut plier).

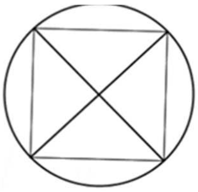


Figure 24. Modèle

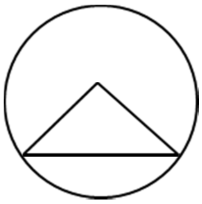


Figure 25. Amorce 5a

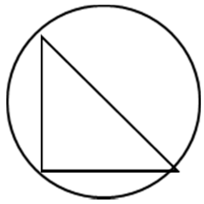


Figure 26. Amorce 5b

Procédure attendue :
5a. Prolonger les côtés de l'angle droit du triangle jusqu'au cercle pour obtenir les sommets manquants du carré.
5b. Prendre le milieu de la diagonale et la joindre au sommet de l'angle droit.

A retenir : Les sommets du carré (du rectangle) sont sur un cercle ; le centre du carré (du rectangle) est le centre du cercle ; les diagonales du carré (du rectangle) sont des diamètres du cercle. *Connaissances éventuellement rencontrées mais non mises en œuvre explicitement* : le centre du cercle est au milieu des diagonales du carré (du rectangle) ; les diagonales du carré (du rectangle) se coupent en leur milieu.

Remarque :
La situation est analogue dans le cas du carré et du rectangle et peut se traiter pour le rectangle seulement (ou pour le carré seulement). Dans le cas du carré les diagonales sont de plus perpendiculaires, ce que nous ne mettons pas en avant ici mais peut être remarqué aussi. Dans le cas 5b, nous ne mettons pas l'équerre à disposition pour rendre impraticable la procédure qui consisterait à terminer le carré avant de tracer ses diagonales.

Étape 6 :

La figure modèle est le carré (ou le rectangle) avec ses diagonales enrichi du cercle circonscrit. On dispose d'une règle (non graduée non informable) et d'un compas. On peut envisager différentes amorces. Nous décrivons deux exemples : 6a et 6b.

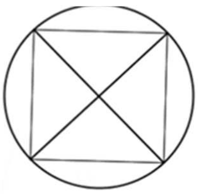


Figure 27. Modèle

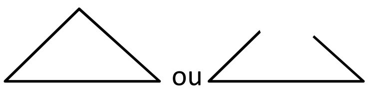


Figure 28. Amorce 6a

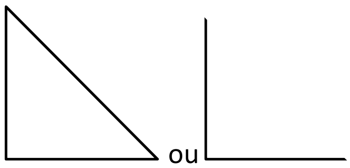


Figure 29. Amorce 6b

6a. On donne comme amorce un triangle quart de carré (ou de rectangle) avec éventuellement le sommet de l'angle (droit dans le cas du carré) effacé. Quand on a reconstitué ce sommet, on a le centre du cercle qu'on peut tracer et on est ramené au problème 5a.

6b. On donne comme amorce deux côtés consécutifs du carré (ou du rectangle) ou un triangle rectangle demi-carré (ou demi-rectangle), en plus de la règle et du compas, il faut disposer d'un outil pour prendre le milieu d'un segment (ou d'une équerre dans le cas du carré) pour se ramener au problème 5b. En effet, si on dispose d'un outil pour prendre le milieu d'un segment, on peut trouver le centre du cercle en prenant le milieu de la diagonale ; on peut alors tracer le cercle ; le diamètre passant par le sommet de l'angle droit donne le quatrième sommet du carré, qu'on peut enfin tracer. Cette méthode est valable dans les deux cas rectangle ou carré). Dans le cas du carré, on peut aussi terminer le triangle (s'il n'était pas tracé entièrement) et tracer la perpendiculaire à la diagonale passant par le sommet de l'angle droit. Cela donne le centre du cercle qu'on peut tracer avant de terminer le carré. Cette méthode n'est pas valable dans le cas du rectangle.

Si on dispose d'une équerre seulement, sans moyen pour prendre un milieu, on peut terminer le carré (ou le rectangle) en traçant deux perpendiculaires comme dans l'étape 2, puis tracer les diagonales et le cercle. Si l'on veut travailler le lien entre les diagonales du carré ou du rectangle et le cercle circonscrit, il faut donc donner un instrument pour prendre le milieu et pas d'équerre.

A retenir : Les diagonales d'un carré ou d'un rectangle se coupent au milieu de chacune d'elles. Ce point est le centre d'un cercle qui passe par les sommets du carré (du rectangle). Ces connaissances ont pu être rencontrées à l'étape 5 mais, le cercle n'étant plus fourni par l'amorce, la détermination de son centre doit maintenant être explicite. De plus, dans le cas du carré, les diagonales sont perpendiculaires.

Etape 7 : Le modèle est celui de l'étape 4 (carré ou rectangle avec ses diagonales sans le cercle) avec des amorces analogues à celles de l'étape 6 et des instruments variés selon les amorces. Nous en donnons quelques exemples. Les amorces 7a et 7b conviennent aussi pour le parallélogramme. L'amorce 7c n'est suffisante que dans le cas du carré.

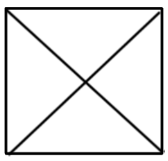


Figure 30. Modèle

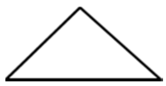


Figure 31. Amorce 7a

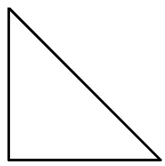


Figure 32. Amorce 7b

Figure 33. Amorce 7c

7a. On dispose d'un instrument de report de longueur. Ici il faut activer et mettre en œuvre la connaissance *« les diagonales se coupent en leur milieu »* pour terminer le carré, le rectangle ou le parallélogramme. Dans le cas du parallélogramme, le triangle de départ est quelconque (figure 34) ; dans le cas du rectangle il est isocèle (les diagonales sont égales) ; dans le cas du carré, il est isocèle et rectangle (les diagonales sont de plus perpendiculaires). On peut utiliser le compas pour tracer le cercle circonscrit au carré ou au rectangle (**mais il n'y en a pas dans le cas du parallélogramme**). Le compas peut aussi servir à reporter les longueurs sur les prolongements des diagonales. Dans le cas du parallélogramme, on reporte une longueur différente sur chaque diagonale.

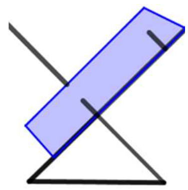


Figure 34

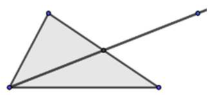


Figure 35

7b. Si on dispose d'un instrument pour prendre le milieu, on peut prendre le milieu de la diagonale et se ramener au cas précédent : on n'a qu'une longueur à reporter (voir Figure 35 dans le cas du parallélogramme).
Dans le cas du carré, au lieu de prendre un milieu, on peut utiliser une perpendiculaire si on dispose d'une équerre (Figure 36).

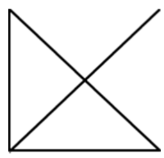


Figure 36

7c. **Ne concerne que le carré** : si l'amorce est réduite à un côté, il est nécessaire de disposer d'une équerre et d'un instrument de report des longueurs pour terminer le carré (voir étapes 3 ou 4).

Remarque importante. Dans le cas du rectangle, l'amorce doit comprendre au moins les longueurs de deux côtés consécutifs. Dans le cas du parallélogramme, la connaissance des longueurs des côtés ne suffit pas ; il faut de plus un angle ou la longueur d'une des diagonales.

Étape 8 *(6ème)* **:** construction du carré à partir d'une diagonale.

On peut la proposer sous la forme d'une restauration de la figure du carré avec ses diagonales à partir d'une diagonale du carré comme amorce. Outils nécessaires : bande de papier qu'on peut plier pour prendre le milieu d'un segment, équerre, règle non graduée non informable et outil de report de longueurs.

Ici il faut mettre en œuvre le fait que les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires. Si le milieu de la diagonale n'est pas donné, il faut le construire. On peut le faire avec une bande de papier qu'on peut plier (partage d'une longueur en deux). Si l'on ne respecte par la perpendicularité des diagonales mais seulement le fait qu'elles se coupent en leur milieu, on obtient un parallélogramme, si de plus on les fait égales, on a un rectangle. Mais on ne peut pas reproduire un rectangle ou un parallélogramme en connaissant seulement une diagonale. Pour un rectangle il faut une autre information, par exemple l'angle des diagonales ou la longueur d'un côté. Pour un parallélogramme, il faut deux autres informations, par exemple la longueur de l'autre diagonale et l'angle des diagonales ou bien la longueur des deux côtés, ce qui permet de construire un triangle demi-parallélogramme.

Remarques *:*
1. Les étapes 5, 6, 7 et 8 demandent de mettre en œuvre les propriétés du carré, y compris celles concernant les diagonales. Elles concernent la fin du cycle 3 (CM2, 6ème). Dans les étapes 5, 6, 7, suivant l'amorce choisie, il faut mettre en œuvre différentes propriétés du carré (ou du rectangle) concernant les côtés, les angles et les diagonales ainsi que les propriétés du cercle pour les étapes 5 et 6. La présence du cercle est une occasion de formuler l'égalité des longueurs des demi-diagonales en même temps que l'égalité des longueurs des rayons d'un cercle. Ces situations permettent de croiser la progression sur le cercle et celle sur le carré ou le rectangle.

2. A mesure que les connaissances des élèves évoluent, on peut réduire le nombre des instruments : le compas pourra bientôt servir d'outil de report de longueurs ; quand on a introduit la médiatrice en 6ème, il peut aussi servir d'outil pour prendre le milieu d'un segment.

3. *Report de longueurs et mesure.* Quand ces problèmes ont été traités avec report de longueur et bandes pour trouver le milieu, ce qui permet de se centrer sur les propriétés géométriques sans calcul, on peut les reprendre en fournissant des mesures de longueur et en ajoutant la règle graduée parmi les instruments. Aux connaissances précédentes s'ajoute le calcul de moitiés.

Carré sur quadrillage ou papier pointé à réseau carré

Le tracé de carrés dont les côtés sont portés par les lignes d'un quadrillage (ou dont les sommets sont sur les points d'un réseau de points à maille carrée) avec pour seul instrument une règle non graduée permet de travailler l'égalité des longueurs des côtés à travers la mesure par des entiers : nombre de bords de carreaux) ; les angles droits ne sont pas travaillés puisqu'ils sont pris en charge par les lignes du quadrillage. L'utilisation de la règle graduée risque d'être gênante plus qu'aidante. Le quadrillage et le réseau de points à maille carrée ne sont pas tout à fait équivalents du point de vue de la perception mais ils le sont du point de vue des connaissances mathématiques à mettre en œuvre.

Si l'on veut tracer des carrés ou des rectangles sans se servir des lignes du quadrillage, les carreaux deviennent une gêne et non une aide sauf pour des positions particulières des figures.

- on peut utiliser les diagonales du quadrillage pour travailler la perception des carrés « sur la pointe » et le tracé des carrés (ou des losanges à partir des diagonales ;
- on peut aussi utiliser d'autres obliques pour les côtés d'un carré qu'on peut alors construire en faisant tourner un triangle rectangle (Figure 37).

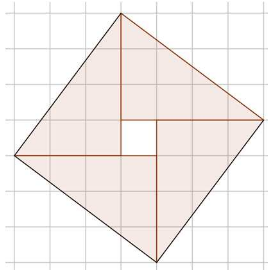


Figure 37

Remarques complémentaires

Le rectangle se différencie du carré par le fait qu'on a deux dimensions pour les longueurs des côtés. Par exemple dans l'étape 4 qui correspond à la construction de la figure à partir des côtés sans donner de modèle à la bonne taille, il faut donner les deux dimensions par des segments qui les représentent mais sans les placer comme côtés du rectangle sinon on a la même situation qu'à l'étape 2.
L'étape 0 est identique, qu'on ait affaire à un carré ou à un rectangle. Elle peut se traiter avec tous les polygones, en variant les figures. Le gabarit de l'étape 1 ne permet pas de restaurer le rectangle puisqu'il ne fournit qu'une des dimensions. En revanche celui de l'étape 3 le permet. On peut donc par exemple traiter la situation de l'étape 0 avec plusieurs polygones puis traiter l'étape 1 et l'étape 2 avec un carré, puis l'étape 3 avec un rectangle avant de la reprendre pour le carré…
Les étapes 3 et 5 sont identiques pour le carré et le rectangle.

Le triangle rectangle peut être abordé d'abord comme demi-rectangle. D'ailleurs, pour la connaissance des figures usuelles, il est intéressant de chercher toutes les figures qu'on peut obtenir en assemblant deux triangles rectangles par un côté : on en trouve six (2 triangles isocèles, 2 parallélogrammes, un rectangle, un cerf-volant) si le triangle rectangle n'est pas isocèle.

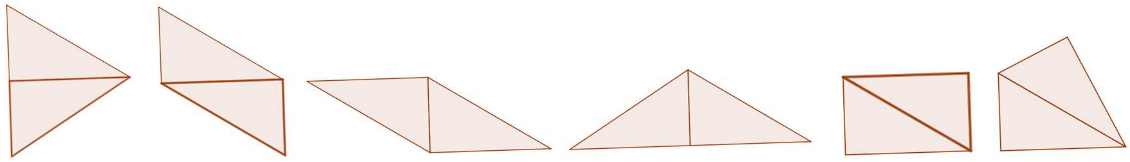


Figure 38. Assemblages par un côté de deux triangles rectangles non isocèles.

Il y a seulement trois manières différentes d'assembler par un côté deux triangles rectangles isocèles (un carré, un parallélogramme et un autre triangle rectangle).

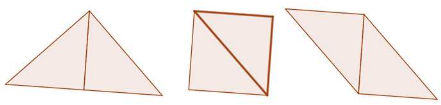


Figure 39. Assemblages par un côté de deux triangles rectangles isocèles.

Le triangle rectangle est aussi à situer parmi les triangles (voir partie II) et il faut voir qu'un triangle quelconque se partage en deux triangles rectangles, ce qui en permet une construction à l'équerre. Remarquons que le partage du triangle relève de la vision surfaces mais que la construction de la hauteur pour faire le partage relève de la vision lignes (voir le paragraphe suivant pour les différentes visions).

Pour le losange, deux points de vue sont à considérer : la définition par les diagonales et celle par les côtés. Ils permettent de relier le losange au carré tout en les distinguant. Pour la construction avec les instruments de tracé, la définition par les diagonales est plus facilement opérationnelle avec une vision surfaces des figures que celle qui réfère à l'égalité des côtés du fait des angles droits.

Ces remarques seront développées dans le paragraphe suivant.

Vision des figures

Rappelons (voir le texte « Notre approche de la géométrie ») que nous distinguons trois visions des figures suivant le niveau de décomposition accessible à celui qui regarde la figure.

La vision surfaces est la vision qui correspond à la perception naturelle des figures comme décomposées en surfaces juxtaposées ou superposées[5]. Dans une vision surfaces, on peut reconnaître des lignes ou des points mais seulement dans le cas où ce sont des bords ou de sommets de surfaces ou alors des lignes ou des points isolés.

La vision lignes correspond à la vision des figures comme définies par un réseau de lignes. Par exemple la vision ligne d'un rectangle avec ses diagonales demande de voir les supports des segments et de pouvoir envisager la figure comme définie par un réseau de six droites qui ont des relations entre elles.

La vision points correspond à la vision des figures comme définies par des points reliés par des lignes. Un point s'obtient par l'intersection de deux lignes. Dans la vision points, on est capable de construire des lignes dans le but d'obtenir des points par des intersections, par exemple, pour tracer le cercle circonscrit à un rectangle, on pourra tracer les diagonales pour obtenir leur point d'intersection comme centre du cercle, sans que les diagonales soient tracées à l'avance.

Vision des figures et relations entre les quadrilatères usuels

Les différentes étapes dans l'approche du carré sont définies en référence à une progression dans la vision et l'analyse des figures, en particulier la capacité à voir dans une figure des unités figurales de dimension plus petite qui entrent dans la composition d'une figure. Nous examinons maintenant les relations entre les quadrilatères usuels qui sont accessibles en fonction de la vision (surfaces, points, lignes) des figures disponible. Nous nous plaçons ici sur papier uni. Il faudrait aussi discuter les reconnaissances, comparaisons, reproductions et constructions sur quadrillage.

Vision surfaces

Avec une vision surfaces, on accède à la décomposition des surfaces en surfaces juxtaposées. Le carré (ou le rectangle) coupé par une diagonale est vu comme composé de deux triangles rectangles. Dans le cas du carré, ce sont des triangles rectangles isocèles. Le losange coupé par une diagonale est composé de deux triangles isocèles symétriques par rapport à cette diagonale. Un losange dont on a tracé les deux diagonales peut être vu comme composé de 4 triangles rectangles ; en réorganisant autrement ces triangles rectangles, on peut former un rectangle, ce qui permettra de calculer l'aire du losange à partir de celle du rectangle. Le travail de décomposition et recomposition de surfaces est important pour accéder à la notion d'aire ; il contribue aussi à attirer l'attention sur les bords des surfaces, leur alignement, la coïncidence de sommets…

[5] Voir Duval R. et Godin M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N* n°76, 7-27.

Les activités de tri relèvent en général d'une vision surfaces des figures. Les côtés sont des bords des surfaces, on peut comparer leur longueur. C'est ce qui permet de différencier le rectangle du carré. A ce stade il est difficile de voir un carré comme un rectangle particulier : on oppose plutôt l'égalité des quatre côtés dans un cas et pas dans l'autre. On peut voir un carré comme un rectangle particulier si on voit un rectangle comme défini par un quadrilatère qui a quatre angles droits : il faut donc être sûr que dès qu'un quadrilatère a quatre angles droits (et même trois), c'est un rectangle. Alors le carré peut être vu comme un rectangle (il a quatre angles droits) qui a une propriété supplémentaire : ses côtés consécutifs sont de même longueur. On peut définir le rectangle par des côtés opposés parallèles et un angle droit, mais il faut une vision lignes pour imaginer les droites supports des côtés.

De même, on peut comparer les angles (notamment par rapport à l'angle droit) et différencier le carré du losange par le fait qu'il a des angles droits en plus des côtés de même longueur. On peut voir le carré comme un losange particulier sur un matériel à l'aide de tiges articulées de même longueur : en déformant un losange de manière continue, on passe par un carré. Cependant construire un losange à partir de l'égalité de la longueur des côtés demande une vision plus élaborée des figures que la construction à partir des propriétés des diagonales.

En effet, la construction d'un losange à partir d'un triangle rectangle quart de losange (Figure 40) est compatible avec une vision surfaces : celle de quatre triangles rectangles juxtaposés. On peut obtenir le losange avec seulement des prolongements de lignes et des reports de longueurs. C'est aussi le cas si l'on donne les demi-diagonales en position. Si on connaît seulement leur longueur, il faut mettre en œuvre le fait qu'elles sont perpendiculaires. Si c'est la longueur des diagonales que l'on connaît, il faut de plus mettre en œuvre le fait qu'elles se coupent en leur milieu (donc déterminer un milieu).

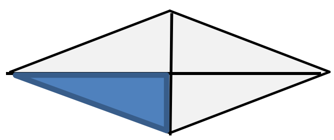


Figure 40

La construction à partir de la donnée de deux côtés consécutifs est plus délicate.

Avec une vision surfaces, il faut joindre les extrémités libres des côtés pour former un triangle isocèle qu'on reconnaît comme demi-losange (Figure 41) et construire l'autre moitié par pliage en se servant de la symétrie.

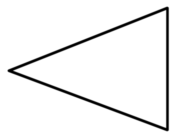


Figure 41

Un tracé avec les instruments usuels sans recourir au pliage nécessite une vision lignes et même points de la figure : En effet,

- soit il faut construire les diagonales et donc le centre du losange à partir de lignes qui ne sont pas tracées au départ (Figure 42) : Une des diagonales joint les extrémités libres des côtés tracés ; l'autre est perpendiculaire à cette première diagonale et passe par le sommet de l'angle, c'est-à-dire l'extrémité commune aux deux segments donnés. Il reste à reporter la longueur de la demi-diagonale sur le support tracé à l'extérieur du triangle à partir du point d'intersection des deux diagonales.

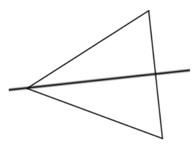


Figure 42

- soit il faut voir le quatrième sommet comme intersection de cercles pour le construire au compas (Figure 43).

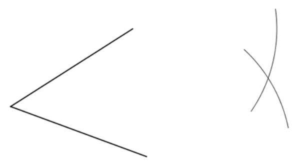


Figure 43

Les positions prototypiques des figures usuelles aident à percevoir les propriétés par la vue sans recourir aux instruments grâce à notre perception privilégiée des horizontales et verticales : rectangle ou carré avec un côté horizontal, losange sur la pointe (ce sont alors les diagonales qui sont en position horizontale et verticale). Ce sont les positions horizontale et verticale des axes de symétrie qui aident la perception. Bien sûr, il est important que les élèves rencontrent les figures usuelles dans des positions variées pour distinguer la figure définie par des propriétés géométriques de sa position dans la feuille liée à des relations spatiales. Cependant les positions prototypiques sont utiles comme référence. La comparaison du carré et du rectangle se fait très bien en position prototypique mais ce n'est pas le cas de la comparaison du carré et du losange (le losange non carré avec un côté horizontal est vu comme parallélogramme car l'égalité des côtés consécutifs se voit difficilement). Le losange se reconnaît mieux avec les diagonales en positions horizontale et verticale, c'est pourquoi un carré sur la pointe sera perçu comme un losange et non comme un carré. Pour voir un losange comme un carré déformé ou un carré comme un losange particulier, il faut réaliser des superpositions, ce qui amène à les tourner, ou les poser côte à côte avec un côté horizontal.

La vision surfaces est liée à la perception directe par la vue ; elle est adaptée à l'utilisation de gabarits. Le recours aux instruments usuels (règle, équerre et outil de report de longueur) nécessite au minimum de s'intéresser aux bords et aux sommets des surfaces et d'envisager de pouvoir prolonger ces bords.

Vision lignes

La vision lignes correspond à la capacité d'envisager, même si elles ne sont pas tracées, les droites supports des segments tracés sur la figure ou joignant deux points de la figure ou de reporter une longueur à partir d'un point sur une droite qu'on a déjà pour obtenir un autre point. La construction des carrés et des rectangles à partir des angles droits et des côtés relève d'une vision intermédiaire entre la vision lignes et la vision points, la vision contour. Avec une vision lignes des figures usuelles, on pourra penser aux diagonales même si elles ne sont pas tracées ou imaginer le quadrilatère à partir de ses diagonales : les diagonales ne sont pas seulement vues comme des segments partageant le quadrilatère en deux parties mais comme des droites passant par les sommets. On peut envisager la relation de perpendicularité entre des droites et pas seulement la notion d'angle droit au sommet d'une surface. On pourra ainsi parler de diagonales perpendiculaires pour le losange et pour le carré, de droites parallèles pour les côtés du rectangle ou du carré.

Vision points

Pour construire les carrés et rectangles connaissant les longueurs des côtés et en utilisant une équerre, une vision lignes des figures est suffisante. En revanche, pour les construire à partir d'une diagonale, une vision points est nécessaire. Cependant il existe une différence entre le carré et le rectangle. On peut construire un carré à partir d'une diagonale à l'aide d'une équerre, d'un instrument permettant d'obtenir le milieu d'un segment et d'un instrument de report de longueur puisque les diagonales sont perpendiculaires, mais dans le cas du rectangle, il faudrait de plus connaître l'angle entre les deux diagonales ou la longueur d'un côté. Pour construire le rectangle à partir d'une diagonale et de la longueur d'un côté, il faut faire l'intersection de deux cercles et voir le cercle comme ensemble de points à une distance donnée d'un point donné. Cela relève de la fin de cycle 3 (en 6ème). Dans le cas du carré ou du report de l'angle entre les diagonales pour le rectangle, on est à la limite entre vision lignes et vision points. En revanche, pour construire le rectangle à partir des longueurs d'une diagonale et d'un côté, il faut vraiment une vision points.

II. Triangles, parallélogrammes et polygones du CE2 à la 6ème

Introduction

Dans la première partie, nous avons accordé une place privilégiée aux angles droits. Ce n'est pas le cas dans cette seconde partie où l'on verra que n'importe quel polygone se décompose en triangles, ce qui donne un moyen de le reproduire. Le triangle rectangle donne un lien entre les deux parties, comme triangle particulier, mais aussi comme moyen de reproduire n'importe quel triangle et donc n'importe quel polygone avec une équerre et un instrument de reports de longueur. Ce sera aussi un moyen de calculer des aires.

Un triangle peut être vu comme une surface plane qui a trois sommets et trois bords droits. A la maternelle, dans des activités de tri, les triangles sont reconnus parmi d'autres formes planes, mais il s'agit alors le plus souvent de triangles équilatéraux ou au moins isocèles, ce qui facilite la reconnaissance et les manipulations : les formes qu'on manipule sont des objets plats de l'espace qui ont deux faces et ces faces ne sont superposables après retournement que si elles sont symétriques. Il s'agit ici de voir dans des situations concrètes qu'un triangle est déterminé par ses trois sommets ou les droites supports de ses trois côtés. A la fin du cycle 3 (6ème) et au début du cycle 4 (5ème), on verra aussi qu'il est déterminé en forme et en taille à retournement près par la connaissance de trois grandeurs bien choisies : les longueurs des trois côtés ou un angle et les longueurs des deux côtés qui l'encadrent ou deux angles et la longueur du côté qu'ils encadrent. Ce sont les cas d'isométrie des triangles. En revanche la connaissance des trois angles détermine la forme à retournement près mais pas la taille.

Le triangle est une forme rigide au sens où la connaissance des trois longueurs des côtés détermine la forme à retournement près. Ce n'est pas le cas des polygones qui ont plus de trois côtés : la connaissance des longueurs des côtés ne détermine pas la forme (par exemple quadrilatère articulé). Pour reproduire des polygones en ne prenant que des mesures de longueur, il faut les trianguler, c'est-à-dire les décomposer en triangles.

Dans la suite, nous suggérons seulement des étapes qu'on pourrait envisager pour une progression sur le triangle et les polygones quelconques du CE2 à la sixième. Ces étapes pourraient être décrites à l'aide de situations comme nous l'avons fait pour la première partie en prenant comme guide l'évolution du regard qu'on porte sur les figures. La progression sur les triangles et polygones est à entrelacer avec celle sur les carrés et autres quadrilatères remarquables.

Étape 0 : le gabarit déchiré avec un coin manquant

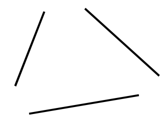
Dès la GS les enfants peuvent reproduire des formes en faisant le contour de gabarits. Comment faire si un des coins du gabarit est abîmé ?

Le problème est le même pour n'importe quel polygone.

Étape 1 : plusieurs coins du gabarit manquent

Pour un triangle, on ira jusqu'au cas où les trois sommets manquent avec la conclusion : si on connaît les supports des trois côtés (si on a un petit morceau de chaque côté), on connaît tout le triangle.

Dans le travail sur les triangles, il est important de voir que la connaissance des trois supports des côtés détermine le triangle (passage de la vision surfaces à la vision lignes). Restaurer un triangle dont il manque les sommets est une situation analogue à l'étape 0 du carré.



On peut même reproduire les triangles en se servant d'un papier qui a n'importe quelle forme et des bords arrondis.

Étape 2 : Les triangles rectangles. On peut reproduire un triangle rectangle avec un angle droit et deux reports de longueur

Lien à faire avec le rectangle

Étape 3 : avec une équerre, on peut partager n'importe quel triangle en deux triangles rectangles de plusieurs façons.

Pour reproduire un triangle avec une équerre et un instrument de report de longueurs, on peut le partager en deux triangles rectangles ; on a alors un angle droit et 3 longueurs à reporter.

A réactiver lors du travail sur les aires.

Étape 3' : un triangle isocèle a deux côtés de même longueur ; on peut le partager en deux triangles rectangles identiques : on peut retourner l'un pour le superposer sur l'autre, côté sur côté, sommet sur sommet

Étape 3 '' : un triangle équilatéral a 3 côtés de même longueur ; on peut le partager en deux triangles rectangles identiques de 3 façons.

Étape 4 : on peut reproduire n'importe quel polygone en le partageant en triangles

On peut commencer par un quadrilatère (non rectangle) et s'apercevoir que reporter les longueurs des côtés ne suffit pas.

Étape 4' : un triangle isocèle a un axe de symétrie ; un triangle équilatéral a 3 axes de symétrie

Étape 5 : un parallélogramme se partage en deux triangles identiques : on peut tourner l'un pour le superposer sur l'autre, côté sur côté, sommet sur sommet.

A réactiver lors du travail sur les aires.

Étape 5' : un losange se partage de deux manières en deux triangles isocèles ou en quatre triangles rectangles. Un losange a deux axes de symétrie : ses diagonales.

Étape 6 : un losange et un rectangle sont des parallélogrammes particuliers ; un carré est un rectangle particulier et aussi un losange particulier.

III. Le cercle

Au niveau perceptif, le cercle (ou le disque) est la forme la plus précocement reconnue par les enfants ; de plus, on dispose d'un instrument, le compas, qui permet de tracer de manière assez satisfaisante des cercles dès le début du cycle 3 mais la caractérisation du cercle comme l'ensemble des points à une même distance, donnée, d'un point fixe appelé centre est encore objet d'apprentissage en 6ème et reste difficile à mobiliser dans des démonstrations nettement plus tard.

Du bord d'un disque, vu comme surface qui a une infinité d'axes de symétrie, à une ligne tracée avec un compas, ce qui nécessite de connaître le centre (où poser la pointe) et le rayon (l'écartement à donner aux branches) en passant par une courbe « qui tourne toujours pareil », suivant les situations, différentes conceptions du cercle peuvent apparaître. Dans une brochure de l'IREM de Paris rééditée en 1986[6], Michèle Artigue et Jacqueline Robinet identifient différentes conceptions du cercle et proposent des situations permettant de les activer et de faire évoluer les connaissances des élèves.

Certaines des situations étudiées dans cette brochure ont inspiré des auteurs de manuels scolaires qui les ont adaptées pour en tirer des tâches plus ponctuelles, par exemple :

[6] Artigue M. et Robinet J. (1986). *Conceptions du cercle chez des élèves de l'école élémentaire.* Paris : IREM. Disponible en ligne http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97017.pdf
La première édition date de 1982.

Dans le manuel Cap Maths CE2 (2011), on trouve l'activité suivante analysée par Caroline Bulf et Valentina Celi (2016)[7] :
Parmi les sept pièces proposées (voir Figure 44, fiche extraite du matériel photocopiable proposé avec le manuel), les élèves doivent déterminer laquelle correspond à la pièce manquante A.
Ils doivent ensuite fabriquer cette pièce à partir d'un secteur angulaire fourni (Figure 45).

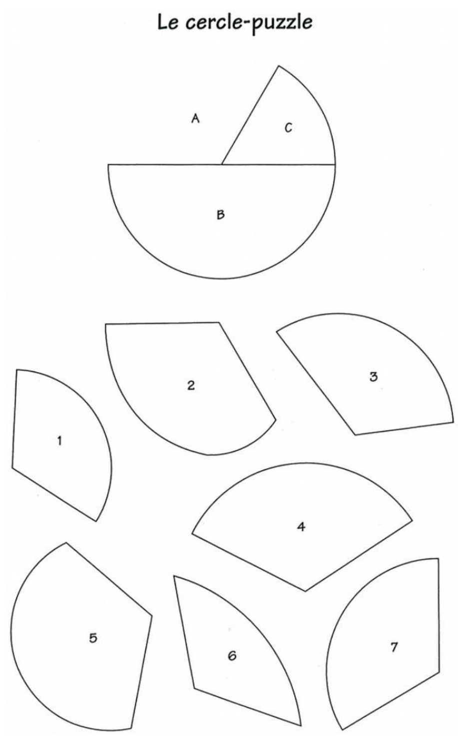


Figure 44. Extrait de Cap maths CE2 (2011)

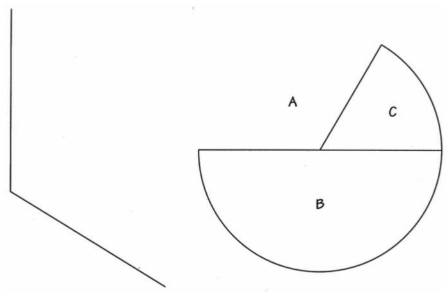


Figure 45. Extrait de Cap maths CE2 (2011)

D'après les observations de Artigue et Robinet (1986), ce qui vient spontanément aux enfants pour vérifier qu'un dessin est bien rond c'est de mesurer « au milieu » dans différentes directions en commençant par la verticale et l'horizontale ou de plier dans différentes directions. Cependant, ce n'est pas pour autant qu'ils peuvent spontanément mobiliser ce pliage quand il s'agit de trouver le centre d'un cercle.

Plus récemment (2016) Caroline Bulf et Valentina Celi examinent les propositions des manuels scolaires et réfléchissent à une progression sur le cercle, du gabarit au compas[8].

Cette progression s'appuie sur l'analyse d'une figure (Figure 46) et la reproduction de cette figure à l'aide de différents instruments de la GS au CE2.
En GS, la reproduction du modèle s'appuie sur la superposition de gabarits en plastique coloré translucide (voir Figure 47).

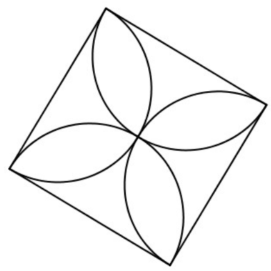


Figure 46. Figure modèle de Bulf et Celi

[7] Bulf C. et Celi V. (2016). Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire une transition clé : du gabarit au compas. *Grand N* - n° 97, p. 21 à 58.
[8] idem.

Plus tard, par exemple au CE1, voire au CE2, on peut demander la reproduction à la même échelle par un tracé à partir de deux gabarits : celui du carré et un seul gabarit de demi-disque ou bien l'amorce du carré et le gabarit d'un demi-disque. Si le modèle est à la même échelle que la reproduction, les enfants peuvent placer leur demi-disque sur le modèle pour tester les différentes positions qu'il y occupe.

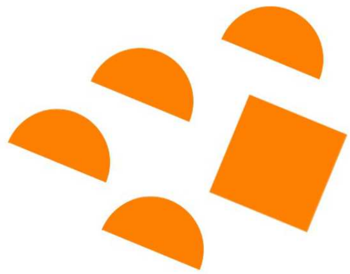


Figure 47. Matériel fourni en GS

Par la suite, on peut proposer la même activité avec le modèle à une taille différente et toujours un gabarit du demi-disque (Figure 48). Les enfants doivent imaginer les positions des demi-disques et voir que le diamètre correspond au côté du carré sans pouvoir le vérifier sur le modèle. Le passage au compas demande d'identifier le centre des demi-cercles au milieu des côtés du carré. Si l'on n'a pas d'instrument pour prendre le milieu, il faut trouver le centre du carré par l'intersection des diagonales puis tracer les médianes du carré en mettant en œuvre la perpendicularité au côté (voir progression sur le carré).

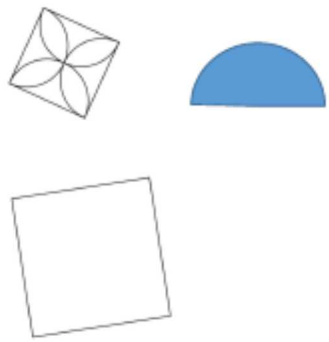


Figure 48.

Au CM2 ou en 6ème on peut donner comme amorce le côté du carré ou le rayon d'un demi-cercle avec pour seuls instruments la règle et le compas plus éventuellement l'équerre dans le cas où l'amorce est le côté du carré.

La vision dynamique du cercle comme trace d'une extrémité d'un segment qui tourne autour de l'autre extrémité est un intermédiaire possible entre le contour du gabarit et le tracé avec le compas ainsi qu'un moyen de matérialiser la distance constante qui sépare la pointe et la mine du compas quand on trace un cercle après avoir fixé l'écartement des branches. Dans la brochure d'Artigue et Robinet, la situation de la porte (prévoir la trajectoire de l'extrémité de la porte quand on l'ouvre ou qu'on la ferme) correspond à ce point de vue. Plus récemment, cette vision a été mise en œuvre à l'aide de la géométrie dynamique par Anne Voltolini[9] et articulée à l'usage du compas pour favoriser la vision du sommet d'un triangle comme intersection de deux cercles dans la construction de ce triangle à la règle et au compas connaissant les longueurs des trois côtés.

Dans ces problèmes le centre est donné, ce qui n'est pas le cas dans le tracé d'un cercle à l'aide d'un gabarit de disque ou de demi-disque[10]. Pour problématiser le passage du gabarit au compas, Bulf et Celi (2016) proposent une situation fondamentale : reproduire au compas un cercle donné sans son centre, « en une seule fois, en se servant uniquement du compas pour le tracer ». Un gabarit de demi-disque de même diamètre que le cercle est fourni aussi. Il « ne

[9] Voltolini A. (2014) Un duo d'artefacts virtuel et matériel pour apprendre à construire un triangle à la règle et au compas. *Grand N* n° 94, p. 25-46.
Disponible en ligne : http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique21&num=94

[10] Remarquons que la donnée d'un autre secteur du disque permet plus facilement d'identifier le centre.

devra servir que pour prendre ou ajouter des informations sur le cercle-modèle ». La procédure attendue consiste à déterminer le centre du cercle à partir de deux diamètres obtenus en plaçant correctement le gabarit sur le modèle puis à prendre l'écartement du compas entre le centre et un point du cercle modèle. Cette situation demande de mettre en œuvre explicitement le fait que le centre du cercle est l'intersection de deux diamètres et que le rayon (ou écartement du compas) est la distance du centre à un point du cercle matérialisée comme un demi-diamètre.